比较判别法比值形式:

若:当n充分大之后,有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$ 则可以满足比较判别法.

若: $\sum b_n$收敛:则: $\sum_{i=1}^{n} b_i$ 有上界: 可以取其中某项:

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| = \left|a_n + a_n\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n} + a_n\frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} + \cdots + a_n\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdots\frac{a_{n+k}}{a_{n+k-1}}\right|$$

$$< |a_n|\left|1 + \frac{b_{n+1}}{b_n} + \cdots + \prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\right|$$

$$= \frac{|a_n|}{|b_n|}\underline{\left|\sum_{i=n+1}^{n+k} b_i\right|} \le \frac{|a_n|}{|b_n|}\varepsilon.$$ 再有: $\cancel{\frac{|a_{n+1}|}{|b_{n+1}|}}\ \frac{|b_n|}{|a_n|} \le \frac{|b_{n+1}|}{|a_{n+1}|}$ 递增.

$\le \frac{|a_1|}{|b_1|}\varepsilon$. 则其收敛. 可以满足比较判别 $\frac{|a_n|}{|b_n|}$ 递减

Cauchy 根式: $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = c$ $\begin{cases} c>1 \text{ 发散} \\ c<1 \text{ 收敛} \end{cases}$

D'Alembert: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{d}$ $d>1$. 发散. $d<1$ 收敛

Raabe: $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r$. $\begin{cases} r>1 \text{ 收敛} \\ r<1 \text{ 发散} \end{cases}$ 比值判断:

证明: $r>1$. 则: $\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 > r/n > s/n > t/n \Rightarrow x_n/x_{n+1} = \underline{\underline{1+\frac{t}{n}}} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\varphi}$

$\Rightarrow n^{\varphi}x_n > (n+1)^{\varphi}x_{n+1}$ 在某项后递减. 则有上界

$\Rightarrow n^{\varphi}x_n < A$. $\Rightarrow x_n < A/n^{\varphi}$ $(\underline{\underline{\varphi>1}})$ $\Rightarrow$收敛. 同理可证另一面

Bertrand: $\lim_{n\to\infty} \ln n\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right] = r$ $\begin{cases} r>1 \text{ 收敛} \\ r<1 \text{ 发散} \end{cases}$

Gauss: $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \underline{\underline{\frac{\mu}{n}}} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$

$\mu>1$ 收敛 $\mu\le 1$ 发散.

Cauchy 积分: $f\downarrow [1,+\infty)$ 递减. $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 同敛散

Cauchy 凝聚: $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 同敛散

→ 递减数列.

Sapagof: 递减: $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \iff \sum_{n=1}^{+\infty} (1-\frac{a_{n+1}}{a_n})$ 发散

证: $b_n = 1-\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 则: 由: $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ 若: $a>0$ 则: $b_n \le \frac{a_n - a_{n+1}}{a}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n - a_{n+1} = a_1 - a \Rightarrow b_n$ (b_n) 也收敛

若: $a=0$ 则有: $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k = \sum_{k=n+1}^{p+n}\frac{a_k-a_{k+1}}{a_k} \ge \sum_{k=n+1}^{p+n}\frac{1}{a_{n+1}}(a_k-a_{k+1}) = \frac{1}{a_{n+1}}(a_{n+1}-a_{n+k})$

则立可以取出n. 令: $\frac{1}{a_{n+1}}(a_{n+1}-a_{n+k})$ 会大于任取的 Epsilon.

11): $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = (-1)^1\frac{1}{1} - 0 = -1$

12): $\left(\begin{aligned} &\arctan\frac{1}{2n^2} = \arctan\frac{n}{n+1} - \arctan\frac{n-1}{n} \\ &\frac{1}{2n^2} = \frac{\frac{1}{n(n+1)}(n^2-n^2+1)}{1+\frac{n^2-n}{n^2+n}} = \frac{n(n+1)}{n(n+1)}\frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2n^2} \end{aligned} \right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\arctan\frac{1}{2n^2} = \arctan 1 - \arctan\frac{0}{1} = \pi/4$

13): $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^k$: Wallis: $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\pi n}$.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^k$

$\downarrow$

$\sim\frac{1}{(\sqrt{\pi n})^k} = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^k n^{k/2}}$ 则 $k\le 2$ 发散. $k>2$ 收敛.

$\sum_{n=1}^{+\infty} n!\left(\frac{a}{n}\right)^n$:

$a_n = n!\left(\frac{a}{n}\right)^n \sim \left(\frac{a}{e}\right)^n\left(\frac{e}{n}\right)^n n! = \left(\frac{a}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$

$b_n = \left(\frac{a}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$

$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(\frac{a}{e}\right)\sqrt{\frac{n+1}{n}}$ 则: $a\ge e$ 发散

$a<e$ 收敛.

(6) 递增且有界：$\{a_n\}$，则考察：$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}}(a_{n+1}-a_n)$

$\{a_n\}$ 有上界，且找一个常数：$A \in [0, \sup a_n]$.

则：$\exists N,\ \forall n>N,\ a_n>A$. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}}(a_{n+1}-a_n) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{a_{n+1}}(a_{n+1}-a_n) + \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}}(a_{n+1}-a_n)$

$\leq S_N + \frac{1}{A}\sum_{n=N+1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n) = S_N + \frac{1}{A}(A_{lim}-a_{N+1})$ 则有上界

$\lim_{n\to\infty} a_n = A_{lim}$

⇒收敛.

(5)：$\lim_{n\to\infty}(n^{2n\sin\frac{1}{n}}a_n)=1$，则判断：$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是否收敛.

由：$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}/\frac{1}{n}=1$，则：$n^{2n\sin\frac{1}{n}}$ 是 n^2 阶的

$n\to\infty$

$0\leq n^{2n\sin\frac{1}{n}} = n^{2n(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o(\frac{1}{n^3}))} \leq n^2$

⇒ a_n 与 $n^{-2n\sin\frac{1}{n}}$ 为等价无穷小量，同敛散，且有：n 充分大：有：$n^{2n\sin\frac{1}{n}} \geq n^{\frac{3}{2}}$ ⇒ $\sum a_n$ 收敛，则证

(6)：$a_n=(1-\frac{p\ln n}{n})^n$ ⇒ $a_n=\exp(n\ln(1-\frac{p\ln n}{n}))$

则 n 充分大时有：$a_n=\exp(n\ln(1-\frac{p\ln n}{n}))=\exp(-p\ln n) = n^{-p}$

则：$\lim_{n\to\infty}\ln(n^p a_n) = \lim_{n\to\infty}[p\ln n+n\ln(1-\frac{p\ln n}{n})]$

$=\lim_{n\to\infty}[p\ln n+n(-\frac{p\ln n}{n}-\frac{1}{2}\frac{p^2\ln^2 n}{n^2})]$

$=\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{2}\frac{p^2\ln^2 n}{n}=0$ ⇒

则可得：n^{-p} 与 a_n 同阶无穷小

则 $p>1$ 则收敛，$p\leq 1$ 发散.

(7)：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(e^{1+\alpha})^{\ln n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}$ 则收敛　且量由 n 充分大：$e^{1+\alpha}\leq\ln n$，$n>e^{e^{1+\alpha}}$ 则可以

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ ⇒ $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \geq \frac{1}{2n\ln(2n+1)}$

↓

发散：

$n^{\frac{1}{n}} \leq (\frac{1}{n}(2n-1)) = \frac{2n-1}{2n}\cdot 2n^2 \leq 2\frac{2n}{2n+1} \leq 2\ln(2n+1)$

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{(1+2x)\ln(2x+1)}dx \Rightarrow \text{发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln(2n+1)}\text{发散}$$

法 P_{1+}

$$(\ln(\ln(2x+1)))' = \frac{1}{(2x+1)\ln(2x+1)}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n\ln(2n+1)}\text{发散. 则证}$$

18): $\{a_n\}, \{b_n\}$ 正项 $\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{n}=0$ 证明: $\lim_{n\to+\infty}b_n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda>0 \Rightarrow \sum a_n$ 收敛

$\cancel{a_{n+1}}$ $\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\lambda}{b_n}$ 记 $\lim_{n\to+\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)}{b_n/n}=+\infty$

$\Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}}-1\geq \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}}\geq\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$ $\boxed{\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\geq\left(\frac{2n+2}{n+1}\right)\left(\frac{1}{n}\right) \text{ 则必定大于. 否则结果不对.}}$

$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}\leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$

$\Rightarrow \forall n: a_n=\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdots\frac{a_{N+1}}{a_N}\right)(a_N)$

$\leq(a_N)\left(\frac{n^2}{a_N N^2}\right)^{-1}=a_N\frac{N^2}{n^2}$ $\Rightarrow \sum_{n=k+1}^{m}a_n\leq a_N\sum_{n=k+1}^{m}N^2\left(\frac{1}{n^2}\right)$ 则收敛.

19): $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 正项级数: 前易: $\sum_{k=1}^{n}a_k-a_n$ 对 n 有界: $a_n\downarrow 0$ 下面证明: 至 a_n 收敛.

$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_n)$ 有界. 取上界:

S_n-S_{n+1}

$=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n+1}a_k-na_n+(n+1)a_{n+1}=na_{n+1}-na_n$

$=n(a_{n+1}-a_n)<0$

$\Rightarrow S_n$ 递增: $\leq M$: $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}a_k\leq M+na_n$.

固定 $n\in N$. 则任取 $m>N$: $\sum_{k=1}^{n}a_k-na_m=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_m)\leq\sum_{k=1}^{m}(a_k-a_m)\leq M$

则: $\sum_{k=1}^{n}a_k\leq M+na_m$ 则令 $m\to+\infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}a_k\leq M \Rightarrow$ 有界: 为 M. 则证

P5

(1): $a_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln n$. 则: $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})<0$

$f(x)=\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)$ $f'(x)=\frac{1+x-x}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}=\frac{1}{(1+x)^2}(1-1-x)<0$ 则↓

$\Rightarrow f(x)<0$

$\ln(1+x)\le x$

则: a_n递减. 而有:有下界: $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\ge\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{i})=\ln(\frac{2}{1}\cdots\frac{n+1}{n})=\ln(n+1)>\ln n$. $\Rightarrow a_n>0$

则:递减有下界必有极限.

(11): 加括号: 若: $a_1+(a_2+a_3)\cdots$ / $(a_1+a_2)+(a_3+a_3)+\cdots$ 均收敛. 则: $\sum_{i=1}^{n}a_i$ 不一定收敛: 取: $a_n=(-1)^{n+1}$ 则可以!

(12): 两收敛收敛逐项相加所得的级数收敛, $\Rightarrow$ 收敛+发散 $\Rightarrow$ 发散

发散+发散 则: 不一定: $a_n=(-1)^n$ $b_n=(-1)^{n+1}$ $\Rightarrow$ 收敛

(13): $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots$

$\frac{\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{2}{1}\Rightarrow$ $a_{2n-1}+a_{2n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}=\frac{2}{n}$ 发散.则发散

(14): Dirchlet. $\sum_{i=1}^{n}a_i=A_n$有界: b_n单调趋于0. 则: 收敛.

Abel. $\sum_{i=1}^{n}a_i$收敛. b_n单调有界. 则收敛.

Dirchlet. $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$收敛: $a_n=(-1)^n$. $\sum_{i=1}^{n}A_n$有界 $b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$. 单调趋于0.则收敛

Abel变换: $\sum_{k=n+1}^{m}a_kb_k=-A_nb_{n+1}+\sum_{k=n+1}^{m-1}A_k(b_k-b_{k+1})+A_mb_m$ (A)

$=\sum_{k=n+1}^{m}(A_k-A_{k-1})b_k=-A_nb_{n+1}+\sum_{k=n+1}^{m-1}(A_k(b_k-b_{k+1}))+A_mb_m$ 则有.

$+|A_n|$有界

Case A: $\Rightarrow|\sum_{k=n+1}^{m}a_kb_k|\le M|b_{n+1}|+M\sum_{k=n+1}^{m-1}|b_k-b_{k+1}|+M|b_m|$

① $b_n\ge0$ ↓ $=M|b_{n+1}+\sum_{k=n+1}^{m-1}M(b_k-b_{k+1})+Mb_m$

$=M(2b_{n+1})=2Mb_{n+1}\Rightarrow$ Dirchlet

② $b_n\le0$ ↑ 则有能仿

case B: $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_1 b_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k b_k = A_1 b_1 + (-A_1 b_2) + \sum_{k=2}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n$ P61-6

$= A_1 b_1 + \sum_{k=2}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k$. 若: b_n单调. 则有: $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le M(|b_1| + 2|b_n|)$

case C: 直接由: b_n单调有界: $\sum a_n$收敛推出.

$\Rightarrow b_n \to b$

$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k (b_k - b) + b \sum_{k=1}^{n} a_k$. 则: 左侧 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ 有界. $(b_k - b)$单调趋于0. 则收敛.

① 右侧: 自身收敛. 则证Abel判别法.

(15) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \cdots + \frac{1}{n}) \frac{\sin nx}{n}$: 讨论敛散性. ②: $x = 2k\pi$. 则零相加. 收敛.

① $x \ne 2k\pi$. 此时: 记: $a_k = \sin kx$. 则有: $|\sum_{k=1}^{n} a_k| = \left| \left(\sum_{k=1}^{n} 2\sin kx \sin \frac{1}{2}x \right) / 2\sin\frac{1}{2}x \right|$

$= \left| \left(\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{2k-1}{2}x - \cos\frac{2k+1}{2}x \right) / 2\sin\frac{x}{2} \right| \le \frac{1}{|\sin\frac{1}{2}x|}$

再有: $b_n = (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}) / n$. 有: $b_n = \frac{C + \ln n + \varepsilon_n}{n} \to 0$. 则: b_n趋于0. 再有: $b_n' = \frac{1 - C - \ln n}{n^2} < 0$. 则 $\downarrow$ 单调

$\Rightarrow$ 单调趋于0 + 有界则收敛

函数项级数:

一致收敛: 定义: 部分和函数: $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$. 若已知: $\boxed{\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}^*,\ \forall n>N,\ x\in D}$

$|S(x)-\sum_{n=1}^{m}u_n(x)|<\varepsilon$: 则: $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 一致收敛. $\boxed{(|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon)}$ $\boxed{\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0}$

一致收敛的定义是相对于和函数而言的: 其相等价的定义有 $\boxed{\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|S_n(x)-S(x)|=0}$

(非: $\exists\varepsilon_0>0,\ \forall N\in\mathbb{N}^*,\ \exists n'>N$, 找到 $x\in D$, $|f_{n'}(x)-f(x)|\ge\varepsilon_0$)

例: $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$, 则: 证明: $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f(x+\frac{k}{n})$ 在任何有限区间一致收敛.

$\boxed{\text{内闭}: \forall I\text{闭}\subseteq\mathbb{R}\ \text{一致收敛}}$

利用闭区间一致连续性质

下面证明任何有限区间内: $f_n(x)\rightrightarrows\int_0^1 f(x+h)dh$. 则找 N, $\forall n>N$:

$r_n(x)=S(x)-S_n(x)$

$\lim_{n\to\infty}\sup|r_n(x)|=0$

(*) $|f_n(x)-\int_0^1 f(x+h)dh|<\varepsilon\quad\forall x\in[a,b]$.

$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}f(x+\frac{k}{n})\cdot\frac{1}{n}=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(x+\frac{k}{n})dh$. $\int_0^1 f(x+h)dh=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(x+h)dh$.

则: $\text{LHS}\overset{(*)}{=}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}(f(x+\frac{k}{n})-f(x+h))dh\right|\le\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}|f(x+\frac{k}{n})-f(x+h)|dh$.

而由闭区间连续函数性质: (Cantor) $f(x+\frac{k}{n})-f(x+h)$ 在闭区间一致连续

~~$\forall\varepsilon>0$, 找N使 $\exists n$ $\forall n>N$ 有:~~ $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$. $|x'-x''|<\delta$ 时, 有: $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

则: 取: $\frac{1}{N}\le\delta$ ⇒ $N\ge\frac{1}{\delta}$. 则: $\forall n>N$. 有: $h-\frac{k}{n}<\frac{1}{n}<\delta$. 则: $|f(x+\frac{k}{n})-f(x+h)|<\varepsilon$.

$\Rightarrow\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}|f(x+\frac{k}{n})-f(x+h)|dh\le\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\varepsilon\,dh=\varepsilon$ 则证

Cauchy 准则: $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 一致收敛: $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^*$, $\forall m>n>N$, $\forall x\in I$

$\boxed{\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}^*\ \forall m,n>N.\ |f_m-f_n|<\varepsilon}$

$|\sum_{k=n+1}^{m}u_k(x)|<\varepsilon$. 特别: 若: $u_n(x)\not\rightrightarrows 0$ $(x\in I)$, 则: $\sum u_n(x)$ 非一致收敛

Weierstrass 判别法: 若: $\boxed{\text{通项}\ |u_n(x)|\le M_n\ (\text{数项})}$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ 收敛 $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 收敛.

$\forall n>N$. $\forall p\in\mathbb{N}^*$. $|f_{n+1}+f_{n+2}+\cdots+f_{n+p}(x)|<\varepsilon$.

例: $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)^2$ 在[0,1]一致收敛:

$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ $\quad u_n'(x) = n x^{n-1}(1-x)^2 - 2x^n(1-x)$

$= x^{n-1}(1-x)\underbrace{(n(1-x)-2x)}_{n-(2+n)x} = 0 \Rightarrow x = \frac{n}{n+2} \in (0,1)$

而: $x \in (0, \frac{n}{n+2})$ $u_n'(x) > 0$.
$x \in (\frac{n}{n+2}, 1)$ $u_n'(x) < 0$

$\Rightarrow u_n(x) \le \frac{n^n}{(n+2)^n} \cdot \frac{2^2}{(n+2)^2} = \frac{2n^n}{(n+2)^{n+2}} \le \frac{2}{(n+2)^2} = M_n$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)^2$ 一致收敛

Abel: $\sum_{i=1}^{\infty} a_n(x)$ 在I一致~~有界~~收敛: b_n 关于n 单调一致有界 则 $\sum a_n(x) b_n(x)$ 一致收敛 一致收敛+单调一致有界.

Dirichlet: $\sum_{i=1}^{n} a_k(x)$ 一致有界: $b_n(x)$ 关于 单调 $b_n(x) \rightrightarrows 0$ 关于n 单调趋于0 + 一致有界

Dini: $\boxed{u_n(x) \ge 0.\ 在[a,b]连续}$ $n=1,2,\dots n$. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在[a,b]收敛于连续函数 $u(x)$

则: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在[a,b]一致收敛于 $u(x)$

证明: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = f(x)$ 则: $\forall x \in [a,b]$: $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \uparrow f(x)$.

$r_n(x) = f(x) - S_n(x)$ 且 $\downarrow 0$ 则证: $S_n(x) \rightrightarrows f(x)$ 即 $\Leftrightarrow r_n(x) \rightrightarrows 0$ 在[a,b]

下面证明: $\forall \varepsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N}^*$. $n > N$ 时有: $|r_n(x)| < \varepsilon$.

$r_n(x) \downarrow 0$. 则: $\forall n > 0$. $\forall x \in [a,b]$: $r_n(x) \ge 0$ 且: $\forall 点 x_0 \in [a,b]$ $\forall \varepsilon > 0$. $\exists N(x_0,\varepsilon) > 0$. $n > N$. $0 \le r_n(x_0) < \varepsilon$

固定n: 令 $n = N_0 = N(x_0,\varepsilon)$ 且由于: $r_n(x) = f(x) - S_n(x)$ 在[a,b]连续 $\Rightarrow \exists \delta_0 > 0$. $x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$

有: $r_n(x) < \varepsilon$. $\Rightarrow n > N_0$ 时有: $|r_n(x)| < \varepsilon$.

则 由 每个点都有: 邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 与 $N(x_0,\varepsilon)$ 令: 在其内有: $n > N(x_0,\varepsilon)$ 有: $|r_n(x)| < \varepsilon$.

则可以取 开覆盖 [a,b] $\bigcup (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ 其有限覆盖: $\bigcup_{j=1}^{K} (x_j - \delta_j, x_j + \delta_j) \supset [a,b]$ $\forall x \in [a,b]$ $\exists j \in$ 一

则取出最大的: $N = \max\{N_1, \dots, N_K\}$: $n > N$ 则有: $|r_n(x)| < \varepsilon$ 则证

P_{2-3}

性质：①：保极限：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在某 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 一致收敛

若：$\lim_{x\to x_0} u_n(x) = c_n$，则：$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}(u_n(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$

②：保连续：

(1)：u_n 在 I 连续，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 和函数 $u(x)$ 在 I 连续

(2)：u_n 在 x_0 不连续，则：$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 x_0 连续（反常：$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 x_0 某邻域内一致收敛）

(3)：u_n 在 (a,b) 内一致连续，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 (a,b) 内闭一致收敛，则：$S(x)$ 在 (a,b) 内连续

考察 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n(1-x) = x-x^2+x^2-x^3+\cdots = x(1-x^n) \to$ 在 $\begin{cases} x & x\in[0,1) \\ 0 & x=1 \end{cases}$

则：$\sum_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)$ 在 $[0,1]$ 非一致收敛，但仍保连续；但是在 $[0,1]$ 内不一致收敛，因为不保连续。

③：可微性：逐项求导：左一致，后内闭一致，各项有连续导数

若：① $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 内一致收敛 ② u_n 有连续导数 ③：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 一致收敛（内闭亦可）

则：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 逐项可微。

④. 可积：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 内一致收敛，因 $u_n(x)$ 在 I 可积，则可以逐项积分：一致收敛保可积

问何时取决于：$R_n(x) := |S(x)-\sum_{k=1}^{n}u_k(x)|$：是否有：$\lim_{n\to\infty}\int_a^b R_n(x)dx = 0$

(3)：$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x & x\in[0,\frac{1}{2n}] \\ 2n(1-nx) & x\in[\frac{1}{2n},\frac{1}{n}] \\ 0 & x\in[\frac{1}{n},1] \end{cases}$ ，$f_n(x)$ 在区间非一致收敛。

$f_n(0)=0$. $\lim_{n\to\infty}f_n(x) = f(x)$ $\forall x\in(0,1]$ $\exists n\in\mathbb{N}^*$. $x>\frac{1}{n}$. 则：$f(x)=0$ $\Rightarrow f(x)=0$

$\frac{1}{x}<n$.

$\Rightarrow f(0)=0$

$f_n(\frac{1}{2n}) = n$. 则：$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)| = \lim_{n\to\infty}(n) = \infty \neq 0$，则非一致收敛

(4)：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ $|u_n(x)| < \frac{1}{n^2}$ 收敛 $\Rightarrow$ 由 Weierstrass 一致收敛

(5): $\forall \alpha \in [\alpha, \pi]$. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$ 在 $[\alpha, 2\pi-\alpha]$ $\qquad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\cos kx}{2\sin\frac{x}{2}}$ $\qquad$ P2-6

$\sum \cos nx$ 一致有界 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 单调一致趋于0。$\Rightarrow$ Dirichlet. $\Rightarrow$ 一致收敛 $\quad = \frac{\sin\frac{x}{2} - \sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$ 卡 $\Rightarrow |S_n(x)| \le \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \ge \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$


$\to y = \sin\frac{x}{2}$.

(6): $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n}$ $(0, 2\pi)$ $\quad \forall N \in \mathbb{N}^*$. $\exists n_0 > N$. $p_0 > n_0$

$x_n = \frac{\pi}{8n_0}$ $\quad \left| \frac{\cos(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8n_0})}{n_0+1} + \cdots \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{2n_0} \right| \geq$

为 $\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 则: 取 $\varepsilon_0 = \frac{\sqrt{2}}{8}$. 则可以: $\forall N \in \mathbb{N}^*$. $\exists n_0 > N$. $p_0 = n_0$. 则可证明

(7): $f(x) \in C[0,1]$. $\sum_{n=1}^{+\infty} (f(x))^n$ 在 $[0,1)$ 上收敛. $\Rightarrow$ A 一致收敛而且绝对收敛
$\quad A \quad \sup_{x \in A} |f(x)| < 1.$ $\quad \left(\sum M^n = \frac{1 - M^{n+1}}{1-M} \text{ 则证} \right)$

$\left(S(x) = \lim \frac{1 - (f(x))^{n+1}}{1 - f(x)} = \frac{1}{1 - f(x)} \right) (f(x) < 1)$ 再由 Weierstrass 则可以

Thm: $f_n(x)$ 在 $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ 一致收敛 $\Rightarrow f(x)$. 则: $\quad \lim_{n\to\infty} a_n = \cancel{} = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

$\left\{ \cancel{} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n. \right.$ $\qquad$ 可以交换顺序. $\qquad\qquad = \lim_{x\to x_0} f(x)$

$\{f_n(x)$ 在 (a,b) 一致收敛. ①: $\lim_{x\to a} f_n(x)$ 存在 则: $\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

(1): $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \cancel{} \begin{cases} 0 & |x| < 1 \\ 1 & \cancel{}\ x = 1 \end{cases}$ $\qquad f_n(x) = x^n$ $\qquad$ 一致

$\left|\ \cancel{}\right.$ $\quad$ 但是 $f(x)$ 在 $x=1$ 不连续. 则: $\{f_n(x)\}$ 在 $(-1, 1]$ 上不一致连续. 但是在 $(-1,1)$ 连续

(12): 在 $[\delta, +\infty)$ $(1, +\infty)$ 下: $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. 则: $\zeta(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内闭一致收敛.

$\Rightarrow$ ($\zeta(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 连续 $\Leftarrow \zeta_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}$ 连续)

一致连续. 由于: $\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) = +\infty$ 则可取出非一致连续的矛盾!

(12): $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n (1-x)$ 在 $[0,1]$ 绝对收敛且一致收敛. $\quad$ 系数为 $f_n(x)$

则: $u_n(x) = x^n(1-x)$. $\sum_{k=0}^{n} u_k(x) = (1-x) \sum_{k=0}^{n} x^n = (1-x) \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 - x^{n+1}$ $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = T(x) = \begin{cases} 1 & \cancel{x=0}\ x \in (0,1) \\ 0 & x = 1. \end{cases}$

$\cancel{|r_n(x)| \le |1-x| x^{n+1}}$

则:

幂级数:

收敛半径: ① $R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$ ② $\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$ ③ $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}=R.$ P3-1.

要求: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ 存在: $l=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ $\begin{cases} l=0, 则 R=\infty \\ l\neq 0, 则 R=1/l. \end{cases}$

$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$, 则: $\frac{1}{\rho}=R.$

(1): 看: $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{3n}(x^2+x+1)^n$: 令 $t=x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$

Dirichlet

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\sin\frac{1}{3n}}{\sin\frac{1}{3n+3}}\right|=1$. 则半径为1. ⇒ $t\in[-1,1)$ 收敛 ⇒ $x\in(-1,0)$

常见:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!!} & \\ e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} & \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} & (1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \text{ 在 } (-1,1) \end{array}}$$

$\alpha=-1$: $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$

$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

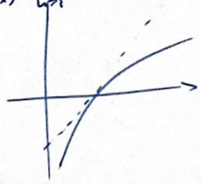
重要:

$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$-\ln(1-x)=\sum\frac{x^n}{n}$

$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x}{n!}$ $\ln x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$



$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$

$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$

(2): $\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1-x}{1-x^3}=\frac{1}{1-x^3}-\frac{x}{1-x^3}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}-x\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}-\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n+1}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}x^n a_n$:

$a_0=1$ $a_6=1$ $a_4=-1$

$a_2=0$ $a_{3n}=1$

$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$

(3): $f(x)=\arctan\frac{2x}{2-x^2}$: $f(x)=\int_0^x f'(t)dt=\int_0^x\left(\arctan\frac{2t}{2-t^2}\right)'dt$

$$=\int_0^x\frac{1}{1+\left(\frac{2t}{2-t^2}\right)^2}\left(\frac{2(2-t^2)+2t(2t)}{(2-t^2)^2}\right)dt=\int_0^x\frac{4+2t^2}{(2-t^2)^2+4t^2}dt$$

$$=\int_0^x\frac{4+2t^2}{t^4+4}dt=\int_0^x\left(1+\frac{t^2}{2}\right)\frac{1}{1+\left(\frac{t^2}{2}\right)^2}dt=\int_0^x\left(1+\frac{t^2}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{t^4}{4}\right)^k dt$$

P3-2

性质：幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $r>0$。① 则在 $(-r,r)$ 内闭一致收敛

② 在 $x=-r$ or $x=r$ 收敛，则：在 $[-r,0]$ / $[0,r]$ 一致收敛

③ 在 $(-r,r)$ 连续，(端点左右连续 ⇐ 端点收敛，

④ 逐项求积与逐项求导后的收敛半径相同

⑤ 可逐项求和 且：$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$　$a_0=f(0)$ ⇒ 幂级数展开的唯一性.

⑥ 和函数保持连续 内闭可积，$(-r,r)$ 可求导
$(-r,r)$

(1). $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n - \sum_{n=1}^{\infty} x^n$　　$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$

$= \cancel{\quad} \frac{-(-1)}{(1-x)^2} - 1 \quad \left(\frac{1}{1-x}-1\right)$

$= \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{1-1+x}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$　　$x\in(-1,1)$

(2): $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}u^n = -\ln(1-u)$　　$x=2$

$(u=\frac{x-1}{3})$　⇒ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-1)^n}{3^n n} = -\ln(1-\frac{2-1}{3}) = -\ln\frac{2}{3} = \ln\frac{3}{2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n(3^n)} = -\ln(1-\frac{x-1}{3})$

(3): $a_n = \int_0^{n\pi}|\sin x|\,x\,dx \overset{u=n\pi-x}{=} \int_0^{n\pi} \cancel{\sin(n\pi-u)}\,(n\pi-u)\,|\sin(n\pi-u)|\,d(n\pi-u)$

$= \int_{n\pi}^{0} -\cancel{\sin}\, n\pi\,|\sin u|\,du + \int_{n\pi}^{0} u|\sin u|\,du = +n\pi\int_0^{n\pi}|\sin u|\,du - a_n$

$= \cancel{+2\pi\cdot 2n\pi^2}\; 2n^2\pi - a_n$

⇒ $a_n = n^2\pi$.

则：$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ ⇒ $|x|<1$.

$S(x) = x^2\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$

$= x^2\left(\frac{1}{1-x}-1-x\right)'' + x\left(\frac{1}{1-x}-1\right)' = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$　　$x=\frac{1}{2}$

$\pi S(\frac{1}{2}) = 2\pi\cdot\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^3} = 2\pi\cdot 3 = 6\pi$

Fourier Series v. Fourier Analysis

1: 三角函数系:

(1): $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\, dx = \frac{1}{m}(-\cos mx)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\, dx = \frac{1}{m}\sin mx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$

(2): $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n)x + \sin(m-n)x\, dx = 0$

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x - \cos(m+n)x\, dx = 0$ 同理可证下面那个.

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\, \cancel{\sin} \cos nx\, dx = 0$

实质: 正交系: $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f\cdot g\, dx$. 是一个内积. 对称. 线性. 正定. 交换性.

2: Calculation:

$$\int_0^{\pi} x \arcsin(\sin x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot x\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x(\pi - x)\, dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \pi\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{1}{3}x^3\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \frac{\pi^3}{24} + \frac{1}{2}\pi^3 - \frac{1}{8}\pi^3 - \frac{1}{3}\pi^3 + \frac{1}{24}\pi^3$$

$$= \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right)\pi^3 = \frac{4+8-6}{48}\pi^3 = \frac{1}{8}\pi^3$$

$$I_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos nx\, dx^2 = \frac{1}{2\pi}\left(x^2\cos nx\Big|_0^{\pi} \times \text{不对}\right),$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\int_0^{\pi} x\, d\sin nx = \frac{1}{n\pi}\left(x\sin nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin nx\, dx\right) = \frac{1}{n\pi}\left(+\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right)$$

$$= \cancel{\frac{1}{n\pi}\cdot\frac{1}{n}} + \frac{1}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = +\frac{2}{n^2\pi}\delta_{\{2\nmid n\}}$$

$$\begin{cases} 0 & 2\mid n \\ -\frac{2}{n^2\pi} & 2\nmid n \end{cases}$$

P4-2

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}x\,d\cos nx = -\frac{1}{n\pi}\left(x\cos nx\Big|_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx\right)$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left(\pi\cos n\pi - \left(\frac{\sin nx}{n}\right)\Big|_{0}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$J_1 = \int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{2(-1)^n}{n^2},\quad J_2 = \int_0^{\pi} x^2\sin nx\,dx = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{2((-1)^n-1)}{n^3\pi}$$

3: Fourier 系数: $T=2\pi$: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$

①: 若: $\sum(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ 一致收敛.

则: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx = \pi a_0 \Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx}$

充分而不必要

有界+一致, 则 再一致收敛.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\sin nx\,dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx\right)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\, b_n\,dx = b_n\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}dx$$

$$= \frac{b_n}{2}\cdot\left(\int_{-\pi}^{\pi}dx - \frac{1}{2n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2nx\,d(2nx)\right) = \pi b_n \Rightarrow \boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx}$$

同理: $\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\, f(x)dx.}$ 则证.

②: 收敛判别:

f在 $[a,b]$ 至多有 有限个间断点, 第一类. 且: f在不可导 or 不连续点的导数左右极限均存在

f在 有限个不可导点外 所有点均存在且连续

(1): Dirichlet: f 周期 2π. $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 按段光滑: 则 $\forall x\in[-\pi,\pi]$ $f(x)$ 的 Fourier 级数收敛.

且收敛于左右极限均值. Fourier Series $A(x)$: $\boxed{A(x_0) = \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}}$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Riemann局部化原理:

(1): 由 Riemann Lebesgue 引理:

P4-3

设 f 在 $[-\pi,\pi]$ / $[a,b]$ 绝对可积, or 广义绝对可积, 则有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx = \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx = 0$$

(2): Dirichlet 核: Definition:

$$T_n(u) = \frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{n}\cos iu \qquad \text{利用}: (\sin\tfrac{u}{2})\cos ku = \tfrac{1}{2}(\sin(k+\tfrac{1}{2})u - \sin(k-\tfrac{1}{2})u)$$

$$\Rightarrow T_n(u) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}} \quad \text{称为Dirichlet 核}$$

(3). 应用: f 的 Fourier 展开的前 n 项和为: $S_n(x)$

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx + b_k\sin kx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx\right)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right)dt \qquad t-x=u. \quad t=x+u.$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos ku\right)du$$

周 $\quad [-\pi-x, \pi-x] \simeq [-\pi,\pi]$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)T_n(u)\,du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}}du$$

b_{n+1}

$n+1 - n+2$

$n+2 - n+3$

$+b_m$

$g(u) = \frac{1}{2}(f(x+u)+f(x-u))$ 偶函数 则可以再拆开

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}} du$$

P4-4

$$= \int_{0}^{\pi} \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}} du.$$

下面可以先处理排弃的Dirichlet核.

$\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{u\to 0^+} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2(n+\frac{1}{2})$ 则发散. 因是可以分割区间 $[0,\pi]$

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}} du. + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2\sin\frac{u}{2}} \sin(n+\frac{1}{2})u\, du.$$

R-L.

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta} \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} \cdot \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}} du.$$

则为Riemann局部化原理;

~~Dini判别法~~ Dirichlet判别法:

f: 周期为2π, $x\in[-\pi,\pi]$. 且: f分段可导. $\Rightarrow$ f之Fourier级数在x处逐点收敛到 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$

$$S_n = \frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0)) + E_n(x)$$

$$\int_0^{\pi} D_n(x)dx = \frac{1}{2}\pi$$

$$\text{则 } E_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}} du - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0)) du.$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{(f(x+0)+f(x-0))}{2} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}} du - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (f(x+0)+f(x-0)) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}} du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+u)-f(x+0)}{2\sin\frac{u}{2}} \cdot \sin(n+\frac{1}{2})u\, du. + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x-u)-f(x-0)}{2\sin\frac{u}{2}} \sin(n+\frac{1}{2})u\, du.$$

若: f分段可导. 则: $\frac{f(x+u)-f(x+0)}{2\sin\frac{u}{2}}$, $\frac{f(x-u)-f(x-0)}{2\sin\frac{u}{2}}$ 分段连续. 广义可积则再利用R-L.可证得.

Example: $\mu \notin \mathbb{Z}$, 则 求: $f(x)=\cos(\mu x)$ 的 Fourier 展开

$b_k \equiv 0$

由于: $f(x)$ 为偶函数, 则 b_k 恒为 0。 奇在 $[-\pi,\pi]$ 积分为0。

P4-5

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\mu x \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left[\cos(\mu-k)x + \cos(\mu+k)x\right] dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\mu+k}\sin(\mu+k)x + \frac{1}{\mu-k}\sin(\mu-k)x\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$\cos k\pi = (-1)^k$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(\mu+k)\pi}{\mu+k} + \frac{\sin(\mu-k)\pi}{\mu-k}\right) = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\sin\mu\pi(-1)^k + \cos\mu\pi\cdot 0}{\mu+k} + \frac{\sin\mu\pi\cos k\pi - \cos\mu\pi\sin k\pi}{\mu-k}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}(-1)^k \sin\mu\pi \, \frac{2\mu}{\mu^2-k^2} = \frac{2\mu(-1)^k \sin\mu\pi}{(\mu^2-k^2)\pi} \quad \square$$

则: Dirchlet: f 连续: $\Rightarrow \cos(\mu x) = \frac{2\mu\sin\mu\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2\mu^2} + \cdots + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2-n^2}\right)$. 则证

同理: $\sin(\mu x) = \frac{2\sin\mu\pi}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\mu^2-n^2}\sin nx\right)$.

Weierstrass 第2逼近定理: $f \in C^0[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$ 则存在三角多项式: $T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$

使得: $\forall \varepsilon>0$ $\exists N\in\mathbb{N}^*$. $\forall n>N$. $\forall x\in\mathbb{R}$: $|f(x)-T_n(x)|<\varepsilon$.

证明: 首先: f 可以以分段线性函数一致逼近: 则: $\exists$ 以周期为 2π 的分段线性函数: g.

使得: $|f(x)-g(x)|<\varepsilon/2$.

再用: Dirichlet: 对 $\varepsilon/2$ 这个 ε. $\exists n$ 充分大时: $|g(x) - S_n(x)(g)| < \varepsilon/2$.

$|f(x)-T(x)| \le |f(x)-g(x)| + |g(x)-S_n g(x)| < \varepsilon$. 则证.

Bessel: $f(x)\in R[-\pi,\pi]$. $\Rightarrow \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2 dx$ (=)